



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

**METODY KONSTRUKCE PŘESNÉHO TVARU OZUBENÍ**

DESIGN METHODS OF THE EXACT GEAR TOOTH SHAPE

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Marián Strmeň**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Aleš Prokop, Ph.D.**

**BRNO 2019**

# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav automobilního a dopravního inženýrství  
Student: **Marián Strmeň**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Aleš Prokop, Ph.D.**  
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Metody konstrukce přesného tvaru ozubení

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Bakalářská práce bude zaměřena na problematiku modifikace a konstrukce přesného tvaru profilu zubu ozubených kol. Vzniklý přesný model slouží pro výpočtové stanovení tuhosti záběru ozubení.

### Cíle bakalářské práce:

Rešerše používaných metod konstrukce přesného tvaru profilu zubu ozubených kol.

Rozdělení jednotlivých metod dle zvolených kritérií.

Aplikaci získaných poznatků vyhotovením 3D modelů jednotlivých typů ozubení prostřednictvím zvoleného CAD softwaru.

### Seznam doporučené literatury:

SHIGLEY, Joseph Edward, MISCHKE, Charles R. a BUDYNAS, Richard G. (ed.). Konstruování strojních součástí. Přeložil Martin HARTL. V Brně: VUTIAM, 2010. 1159 s. ISBN 978-80-214-2629-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Josef Štětina, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## ABSTRAKT

Táto bakalárska práca sa zaoberá oblasťou konštrukcie presného tvaru ozubení ozubených kolies. Práca sa pre rozsiahlosť témy zameriava na ozubenie čelných ozubených kolies s priamymi a šikmými zubami. Na začiatku sú zhrnuté teoretické poznatky týkajúce sa ozubených kolies, ktoré poslúžia na zhotovenie 3D modelov ozubených kolies. Ďalej je v práci popísaný všeobecný postup zhotovenia jedného modelu na základe získaných informácií.

## KLÚČOVÉ SLOVÁ

Ozubené kolesá, profil zubu, evolventa, trochoida, Creo Parametric, 3D model

## ABSTRACT

The following bachelor's thesis investigates construction of the exact gear tooth shape. Considering such a broad topic, the thesis is focused primary on helical gears. In the beginning, this thesis illustrates fundamental theory of gears, which will be used for creating 3D model. Second part describes designing 3D model based on learned theory.

## KEYWORDS

Gears, gear tooth shape, involute, trochoid, Creo Parametric, 3D model

## BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

STRMEŇ, M. *Metody konstrukce přesného tvaru ozubení*. Brno, 2019. Bakalárska práca. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automobilního a dopravního inženýrství. 36 s. Vedúci bakalárskej práce Aleš Prokop.

## ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že táto práca je mojím pôvodným dielom, spracoval som ju samostatne pod vedením Ing. Aleša Prokopa Ph.D. a s použitím literatúry uvedenej v zozname.

V Brne dňa 24. mája 2019

.....

Marián Strmeň

## **POĎAKOVANIE**

Týmto by som chcel poďakovať vedúcemu bakalárskej práce pánovi Ing. Alešovi Prokopovi Ph.D. za vedenie tejto práce, poskytnutie podkladov a odbornej literatúry, rady a pomoc počas doby písania.

## OBSAH

Úvod.....	8
1 Základná geometria.....	10
2 Rozdelenie ozubených súkolesí .....	12
2.1 Súkolesie s rovnobežnými osami .....	12
2.1.1 Čelné ozubené kolesá s priamymi zubami .....	13
2.1.2 Čelné ozubené kolesá so šikmými zubami .....	13
2.2 Súkolesie s rôznobežnými osami.....	15
2.3 Súkolesie s mimobežnými osami .....	16
2.3.1 Skrutkové súkolesie .....	16
2.3.2 Závitkové súkolesie .....	16
2.3.3 Hypoidné súkolesie.....	17
3 Profil zuba.....	18
4 Metódy konštrukcie združených profilov.....	20
4.1 Priama metóda.....	20
4.2 Trochoidná metóda .....	21
4.3 Obáľková metóda.....	21
5 Združené profily ozubenia.....	23
5.1 Evolventné ozubenie.....	23
5.1.1 Prechodová krivka .....	24
5.2 Cykloidné ozubenie .....	25
5.3 Wildhaber - Novikovo ozubenie .....	25
6 Korekcia ozubenia.....	26
7 Tvorba modelu.....	28
7.1 Tvorba 2D modelu.....	28
7.2 Tvorba 3D modelu.....	31
Záver .....	32
Zoznam použitých skratiek a symbolov.....	35



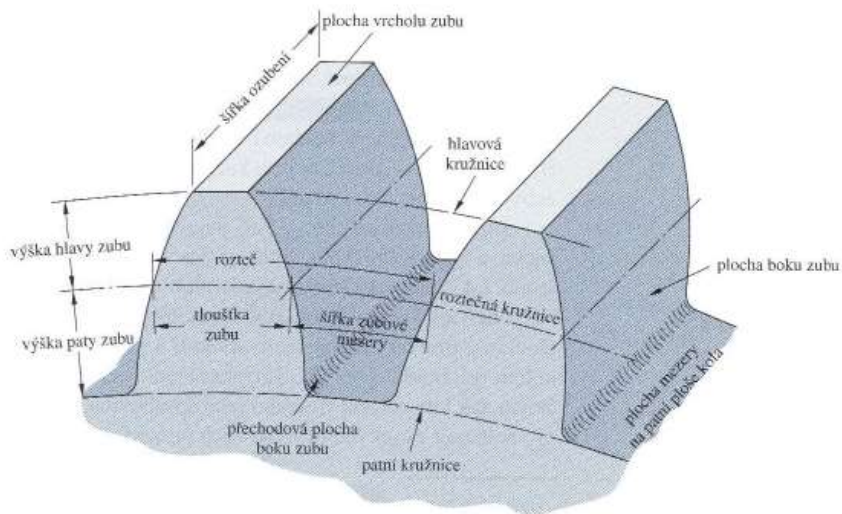
## ÚVOD

Ozubené kolesá patria medzi tvarovo najzložitejšie súčiastky. Je to základný konštrukčný prvok, ktorý v zábere s ďalšími ozubenými kolesami tvorí prevodový mechanizmus. Slúži hlavne na prenos a transformáciu výkonu v podobe krútiaceho momentu alebo na zmenu osi prípadne smeru otáčania. Krútiaci moment prenášajú kinematické a silové väzby medzi jednotlivými zubami usporiadanými na pracovných plochách ozubených kolies. Pre správnu funkciu väzieb je nutné správne navrhnuť tvar zubu. Systém spolu zaberajúcich zubov na kolesách tvorí ozubený prevod. Najjednoduchší prevod sa nazýva súkolesie a pozostáva z dvojice ozubených kolies. Dvojicu tvoria hnacie a hnané koleso. Úloha súkolesia je transformácia krútiaceho momentu a uhlovej rýchlosti s vysokou účinnosťou a ideálne pri nízkom hluku. Ozubené kolesá sa postupom času vyvinuli od jednoduchých tvarov až po tvary, ktoré môžeme označiť z hľadiska výpočtov za veľmi zložité. Veľký rozvoj v oblasti obrábacích strojov, výroby a konštrukčných softwarov dnes umožňuje efektívne navrhovať a vyrábať presné ozubené kolesá rôznych tvarov a veľkostí. S technickým pokrokom rastú aj požiadavky na presnosť, odolnosť a životnosť ozubených kolies. Tieto požiadavky zabezpečujú okrem presnej výroby a správneho návrhu aj rôzne modifikácie a úpravy, ktoré je potrebné optimálne navrhnuť. Úlohou tejto práce je získať a objasniť teoretické znalosti konštrukcie presného ozubeného kolesa a na základe týchto informácií vytvoriť príslušný 3D model.

# 1 ZÁKLADNÁ GEOMETRIA

Po obvode ozubeného kolesa je usporiadané ozubenie, ktoré je vytvorené medzi hlavovým a pätným valcom s priermi  $d_a$  a  $d_f$ . Pätný valec ohraničuje teleso ozubeného kolesa. Geometria ozubeného kolesa sa charakterizuje v čelnom reze, teda v reze kolmom na os otáčania, kde hlavové a pätné valce prejdú do kružníc. Ozubenie tvoria zuby s počtom  $z$  rovnomerne rozloženom po obvode. Vzdialenosť medzi dvoma susednými bokmi zubov sa nazýva rozstup  $p$  a meria sa na rozstupovej kružnici s priemerom  $d$ , ktorá je s hlavovou a pätnou kružnicou súosá. Rozstupová kružnica je kľúčová pre určovanie rozmerov ozubení a rozdeľuje zub na hlavovú časť s výškou hlavy  $h_a$  a pätnú časť s výškou päty  $h_f$ . Celková výška zuba má teda veľkosť  $h$ . Rozstup dostaneme taktiež súčtom hrúbky zuba  $s$  a šírky zubovej medzery  $e$  [1].

$$p = s + e \quad (1)$$



Obrázok 1 Hlavné rozmery ozubeného kolesa [1]

Pre výšku päty ďalej platí [1]:

$$h_f = h_a + c \quad (2)$$

kde  $c$  je radiálna vôľ'a.

Charakteristické kružnice môžeme vyjadriť [1]:

$$d_a = d + 2h_a \quad (3)$$

$$d_f = d + 2h_f \quad (4)$$

Ďalšou charakteristickou veličinou ozubení je modul  $m$ . Můžeme ho definovat aj ako časť rozstupovej kružnice pripadajúcej na jeden zub. Modul môžeme ďalej definovať ako pomer rozstupu vyjadreného v milimetroch k číslu  $\pi$ , teda platí [1]:

$$m = \frac{d}{z} \quad (5)$$

$$m = \frac{p}{\pi} \quad (6)$$

Po zavedení príslušných súčiniteľov môžeme vyjadriť všetky dĺžkové veličiny ako násobok  $m$ . Tieto súčinitele sú normalizované a majú hodnoty [2]:

$$\text{súčiniteľ výšky hlavy zuba: } h_a^* = 1 \quad (7)$$

$$\text{súčiniteľ radiálnej vôle: } c^* = 0,25 \quad (8)$$

$$\text{súčiniteľ výšky päty zuba: } h_f^* = h_a^* + c = 1,25 \quad (9)$$

## 2 ROZDELENIE OZUBENÝCH SÚKOLESÍ

Ozubené súkolesia môžeme z hľadiska vzájomnej polohy ôs rozdeliť na súkolesie [3]:

s rovnobežnými osami – čelné súkolesie

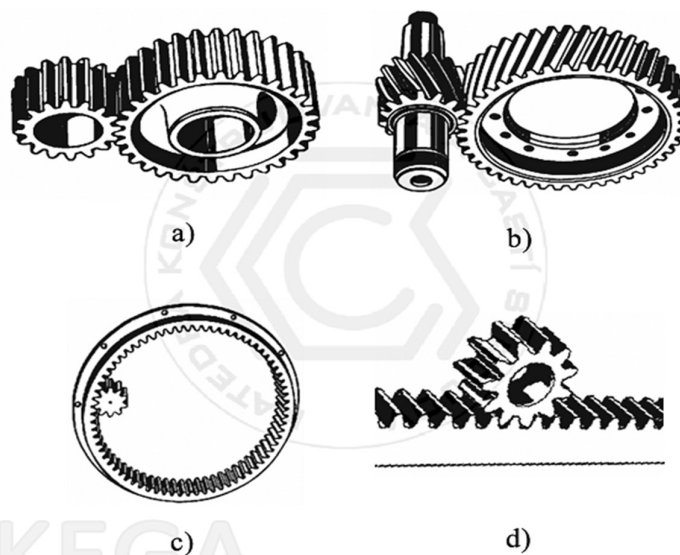
s rôznobežnými osami – kužeľové súkolesie

s mimobežnými osami – skrutkové súkolesie

Každý z týchto typov súkolesí je rozsiahla téma. Pre účely tejto práce a hlavne pre jej praktickú časť sú však dôležité hlavne čelné ozubené kolesá, preto sa im budeme venovať detailnejšie. Pre úplnosť si však v jednoduchosti priblížime aj ozubené kolesá tvoriace súkolesia s rôznobežnými a mimobežnými osami.

### 2.1 SÚKOLESIE S ROVNOBEŽNÝMI OSAMI

Súkolesie pozostávajúce z čelných ozubených kolies (obr. 2) patrí medzi najpoužívanejší typ ozubených prevodov. Čelné ozubenie prenáša krútiaci moment medzi dvoma rovnobežnými hriadeľmi. Bežné je aj použitie ozubeného hrebeňa (obr. 2d), ktoré možno považovať za ozubené koleso s nekonečným priemerom, ktorý umožňuje premenu otáčavého pohybu na posuvný a opačne. Pri prevodovkách s požiadavkou na malé rozmery je praktické použiť súkolesie s vnútorným ozubením (obr. 2c). V takom prípade sa zmysel otáčania medzi hnacím a hnaným kolesom nemení. Čelné ozubené kolesá môžeme rozdeliť z hľadiska typu zubov na čelné ozubené kolesá s priamymi alebo šikmými zubami. K ďalšiemu rozdeleniu je potrebné si definovať bočnú krivku zuba. Bočná krivka zuba je priesečnica plochy zuba s rozstupovou plochou ozubeného kolesa. [1]



Obrázok 2 Čelné súkolesia: s priamymi zubami (a), so šikmými zubami (b), s priamymi zubami vnútorné (c), ozubený hrebeň - ozubený pastorok (d) [3]

### 2.1.1 ČELNÉ OZUBENÉ KOLESÁ S PRIAMÝMI ZUBAMI

Čelné ozubené kolesá s priamymi zubami (obr. 2a) majú bočné krivky zubu tvorené priamkami rovnobežnými s osami ozubených kolies. Sú výrobne najjednoduchší typ ozubených kolies. Používajú sa na prenos otáčavého pohybu a mechanickej energie medzi rovnobežnými hriadelmi. Pri chode nevzniká axiálna sila, preto vchádza do záberu celý zub a ihneď dochádza k jeho zaťaženiu, čo spôsobuje rázy. Pre svoju jednoduchosť slúžia k odvodeniu teórie rovinného ozubenia, ktorá predstavuje súbor základných poznatkov o geometrii, kinematike a záberových vlastnostiach rovinných profilov. Pri návrhu treba dbať na to, že pri výrobe evolventného boku zubu môže nástroj odobrať materiál pri päte zubu. Tento jav sa nazýva podrezanie päty zubu a nastáva v prípade ozubených kolies s malým počtom zubov. Minimálny počet zubov sa určí zo vzťahu [1]:

$$z_{min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad (10)$$

kde  $\alpha$  je uhol záberu a pre  $\alpha = 20^\circ$  je minimálny počet zubov 17.

### 2.1.1 ČELNÉ OZUBENÉ KOLESÁ SO ŠIKMÝMI ZUBAMI

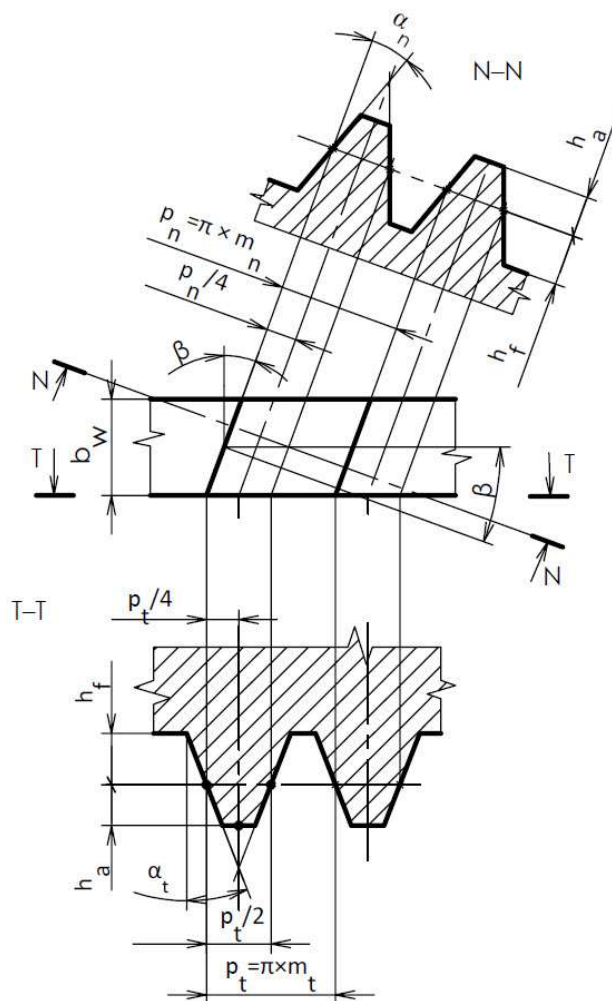
Majú bočné krivky zubu tvorené skrutkovicami s uhlom sklonu  $\beta$ . Uhol  $\beta$  vyjadríme napríklad zo vzťahu [4]:

$$\cos \beta = \frac{(z_1 + z_2)m}{2a} \quad (11)$$

kde  $z_1$  a  $z_2$  sú počet zubov kolesa a pastorku,  $a$  je osová vzdialenosť a  $m$  je modul ozubenia. Aby došlo k plynulému záberu medzi dvoma ozubenými kolesami so šikmými zubami, obidve musia mať rovnaký uhol sklonu  $\beta$  ale opačný zmysel stúpania bočnej krivky. Pri návrhu minimálneho počtu zubov sa vychádza z hodnoty, ktorá platí pre ozubené kolesá s priamymi zubami. Teoretická hodnota minimálneho počtu zubov sa určí zo vzťahu [4]:

$$z_{min} = 17 \cos \beta \quad (12)$$

Pre ozubené kolesá so šikmými zubami je potrebné rozlišovať čelný rez v rovine T-T (index t), ktorý je potrebný na tvorbu modelu a normálový rez v rovine N-N (index n), ktorý zobrazuje normalizovaný profil podobne ako pri ozubených kolesách s priamymi zubami [5].



Obrázok 3 Rozmery základného profilu ozubeného kola [5]

K vytvoreniu 2D modelu šikmého ozubení musíme prepočítať normalizované parametre z normálového rezu do čelného pomocou uhlu  $\beta$ . V normálovom reze je to normálový rozstup  $p_n$ , normálový modul  $m_n$  a normálový uhol záberu  $\alpha_n$ . V reze kolmom na os otáčania, v čelnom reze, je to čelný rozstup  $p_t$ , čelný modul  $m_t$  a čelný uhol záberu  $\alpha_t$ . Pre tieto parametre platí [4]:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} \quad (13)$$

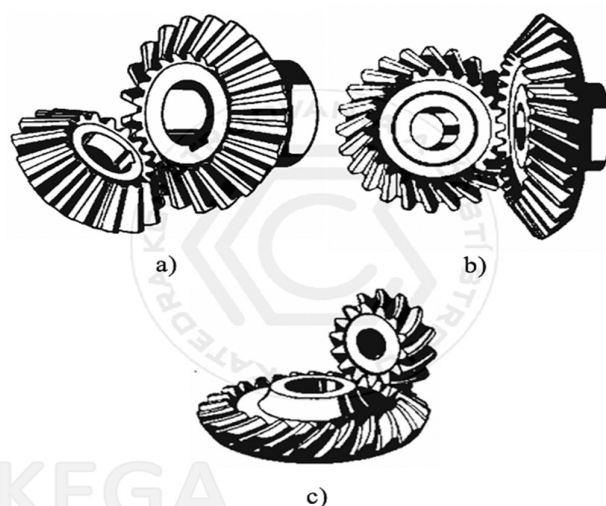
$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta} \quad (15)$$

V priemysle je ich využitie podobné ako u kolies s priamymi zubami, avšak ich výhodou je plynulejší vstup a výstup zubových dvojíc do aj zo záberu. Súkolesie má preto tichší a plynulejší chod. Z toho dôvodu sa tieto kolesá používajú pri prevodoch s vyššími výkonmi a vysokými prevádzkovými rýchlosťami ako aj pri prevodoch s požiadavkou na nižšiu hladinu hluku. V praxi sú to rýchlobežné priemyselné prevodovky alebo súkolia automobilových prevodoviek v stálom zábere. Ďalšími výhodami šikmých zubov oproti priamym sú väčší počet zubov v zábere, rovnomernejšie zaťaženie zubov a menšie vnútorné dynamické sily. Jeho nevýhodou je však vznik axiálnej sily, ktoré namáhajú ložiská hriadeľa [6].

## 2.2 SÚKOLESIE S RÔZNOBEŽNÝMI OSAMI

Súkolesie s rôznobežnými osami sa nazýva kužeľové súkolesie a vytvára kinematickú väzbu medzi hriadeľmi s rôznobežnými osami pričom má ozubenie vytvorené na kužeľových plochách. Uhol medzi osami je ľubovoľný, ale prevažne sa používa  $90^\circ$ . Pre kužeľové súkolesie je charakteristická vyššia pevnosť a trvanlivosť ozubení, čo umožňuje dosiahnuť vyšší výkon. To sa samozrejme odráža na nákladoch na výrobu. Ďalšími výhodami oproti čelným ozubeniam sú tichý chod a menšia citlivosť na výrobné nepresnosti. Taktiež rozlišujeme kužeľové ozubené súkolia s priamymi (obr. 4a), šikmými (obr. 4b) alebo zakrivenými zubami (obr. 4c). Pri výrobe ozubení je potrebné sledovať okrem dĺžkových odchýlok aj odchýlky uhlové. Pri letmom uložení jedného z kolies je nebezpečenstvo vzniku väčších deformácií, ktoré môžu spolu s nepresnosťami výroby nepriaznivo ovplyvniť záberové pomery. To platí predovšetkým u kolies s priamym ozubením. Kolesá s priamymi zubami sú preto vhodné pre menej náročné prevody s prevádzkovými rýchlosťami 2 až 3 m/s. Pri vyšších rýchlostiach a zaťaženiach sa používajú kolesá so šikmými zubami, ktoré sú na výrobné nepresnosti a deformácie menej citlivé [2, 3].



Obrázok 4 Kužeľové ozubené súkolesia s priamymi (a), šikmými (b) a zakrivenými (c) zubami [3]

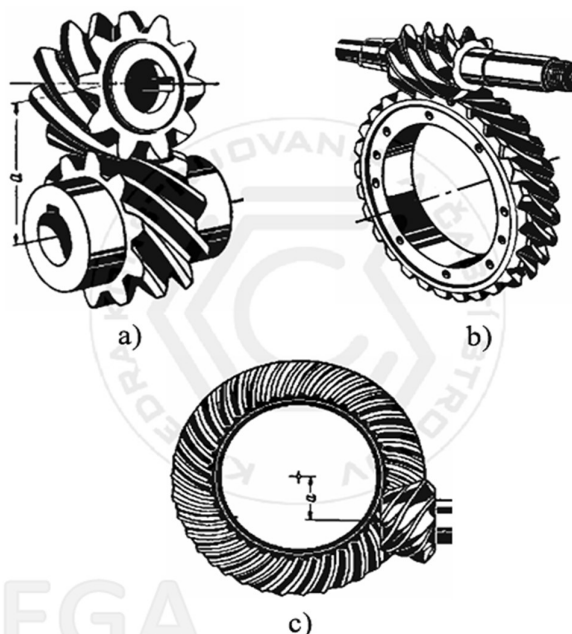
### 2.3 SÚKOLESIE S MIMOBEŽNÝMI OSAMI

Súkolesie, ktorého vzájomná poloha ôs je mimobežná môžeme ďalej rozdeliť na súkolesie [3]:

skrutkové

závitovkové

hypoidné



Obrázok 5 ozubené súkolesie skrutkové (a), závitovkové (b), hypoidné (c) [3]

#### 2.3.1 SKRUTKOVÉ SÚKOLESIE

Skrutkové súkolesia (obr. 5a) prenášajú rotačný pohyb a krútiaci moment medzi mimobežnými hriadeľmi. Boky zubov sa po sebe odvalujú a zároveň posúvajú - skrutkový pohyb. Vzájomnú polohu mimobežných osí hriadeľov určuje ich najkratšia vzdialenosť a uhlová vzdialenosť. Teoretickým základom skrutkových súkolesí je hyperboloidné súkolesie. Z technologických dôvodov sa nepoužíva a slúži len ako teória pre reálne súkolesia valcové a kužeľové [2].

#### 2.3.2 ZÁVITKOVÉ SÚKOLESIE

Krútiaci moment sa prenáša medzi mimobežnými hriadeľmi s uhlovou vzdialenosťou osí  $90^\circ$ . Závitovkové súkolesie (obr. 5b) je určitý prípad skrutkového súkolesia valcového, ktorého počet zubov pastorka klesne na minimum, tzn. 1 až 5. Šírka pastorka presahuje dvojnásobok jeho rozstupového priemeru, zuby na ňom vytvárajú súvislé závit. Z toho vznikol aj jeho



názov „závitovka“ a spoluzaberajúce koleso nazývame závitovkové koleso. Podľa tvaru telies so závitovkovým súkolesím rozdeľujeme súkolesia na [2]:

**Súkolesie valcové** – závitovka aj závitové koleso sú valcové. Dotyk v ozubení je bodový, čo je nepriaznivé. Používa sa iba v podradných prípadoch (malý výkon, ručný pohon) [2].

**Súkolesie zmiešané** – závitovka je valcová, závitovkové teleso je globoidné. Používa sa pre malé a stredné výkony (0,04 až 120 kW). Majú priaznivejší dotyk zubov ale ich výroba je nákladnejšia [2].

**Súkolesie globoidné** – závitovka je globoidná, závitovkové koleso je globoidné. Dotyk zubov je najpriaznivejší, menšie rozmery a menšie opotrebenie. Zároveň je ich výroba najdrahšia. Používajú sa pre výkony až 200 kW [2].

### 2.3.1 HYPOIDNÉ SÚKOLESIE

Vo všeobecnom prípade tvoria axoidy relatívneho pohybu rotačné jednoploché hyperboloidy. Rotačné telesá majú kužeľový tvar. Podľa tvaru zubov rozoznávame hypoidné kolesá (obr. 5c) so šikmými a špirálovými zubami. V praxi sa používajú pre kolmé mimobežné osy [4].

### 3 PROFIL ZUBA

Aby bol záber medzi dvoma ozubenými kolesami plynulý, musí tvar zuba spĺňať podmienku stáleho prevodového pomeru  $i$ . To znamená, že konštantná uhlová rýchlosť hnacieho kola  $\omega_1$  musí byť rovnaká ako uhlová rýchlosť hnaného kola  $\omega_2$ . Obvodové rýchlosti v dotyku ozubených kolies musia byť teda tiež rovnaké, inak by boky zubov do seba narážali alebo by sa vzdŕaľovali. Obvodovú rýchlosť ozubených kolies v mieste dotyku vypočítam z rovníc [7]:

$$v_1 = \omega_1 \cdot r_1 \quad (16)$$

$$v_2 = \omega_2 \cdot r_2 \quad (17)$$

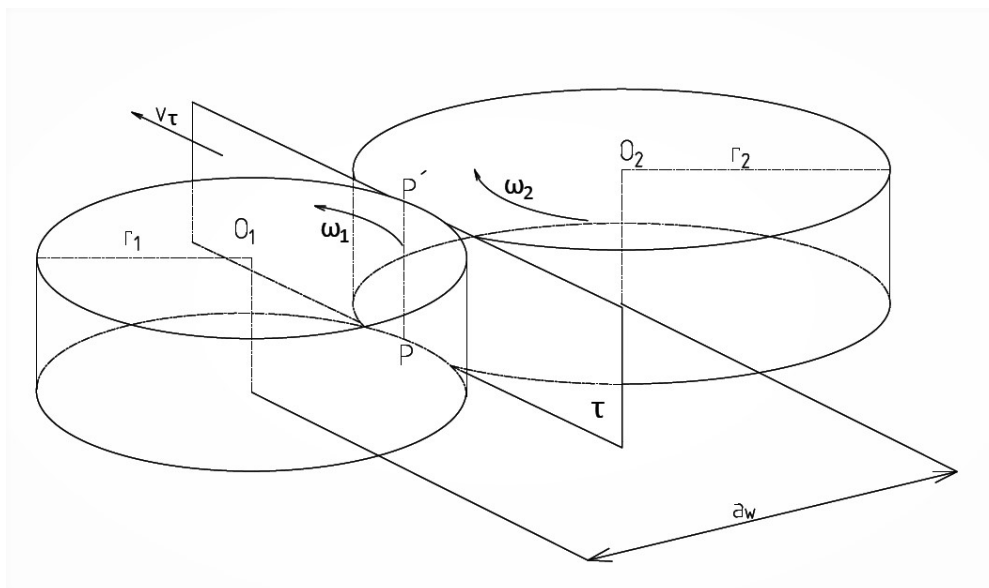
kde  $r_1$  a  $r_2$  sú polomery rozstupových kružníc ozubených kolies a keďže platí :

$$v_1 = v_2 \quad (18)$$

platí aj:

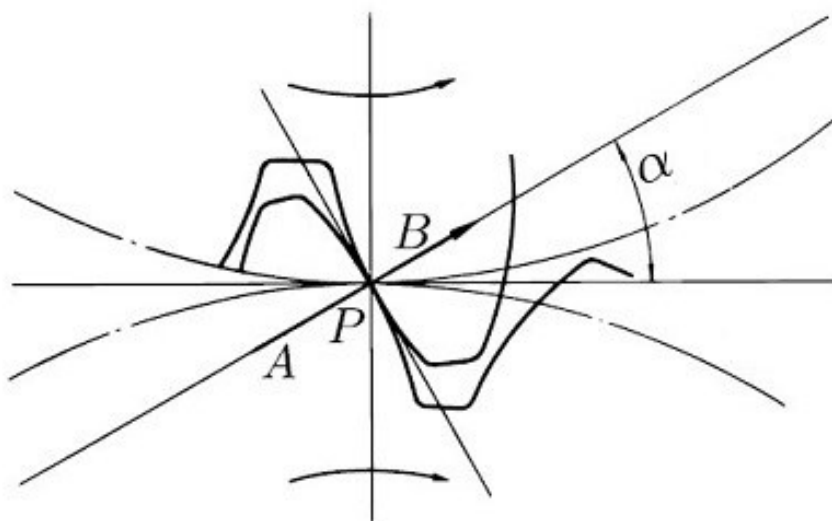
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \text{konšt.} \quad (19)$$

Ak teda podmienka stáleho prevodového pomeru platí, záber dvoch ozubených kolies sa dá z kinematického hľadiska nahradiť valením dvoch valcov po sebe bez sklzu po valivej rovine  $\tau$  (obr. 6). Valivá os  $PP'$  je okamžitou osou vzájomného relatívneho pohybu valcov [7].



Obrázok 6 Valivé valce a valivá rovina [7]

Záber ozubených kolies je potom plynulý a nevyvoláva kolísanie prenášaného momentu, ktoré by bolo inak zdrojom zvýšených vibrácií a hluku. Tieto podmienky splňujú iba určité profily zubov, ktoré sa nazývajú korektne zaberajúce alebo združené profily. V priemysle sa najčastejšie používa evolventný tvar. Môžeme tiež naraziť na tvar cykloidný a ďalšie. Pre každý profil je charakteristický uhol záberu a záberová čiara. Uhol záberu  $\alpha$  je uhol medzi priamkou prechádzajúcou pólom  $P$  kolmou spojnicu stredov dvoch spolu zaberajúcich kolies a záberovou čiarou resp. záberovou priamkou (obr. 7). Bod dotyku dvoch zubov v zábere sa počas záberu posúva. Jeho trajektória sa nazýva záberová čiara a vždy prechádza pólom  $P$  [8].



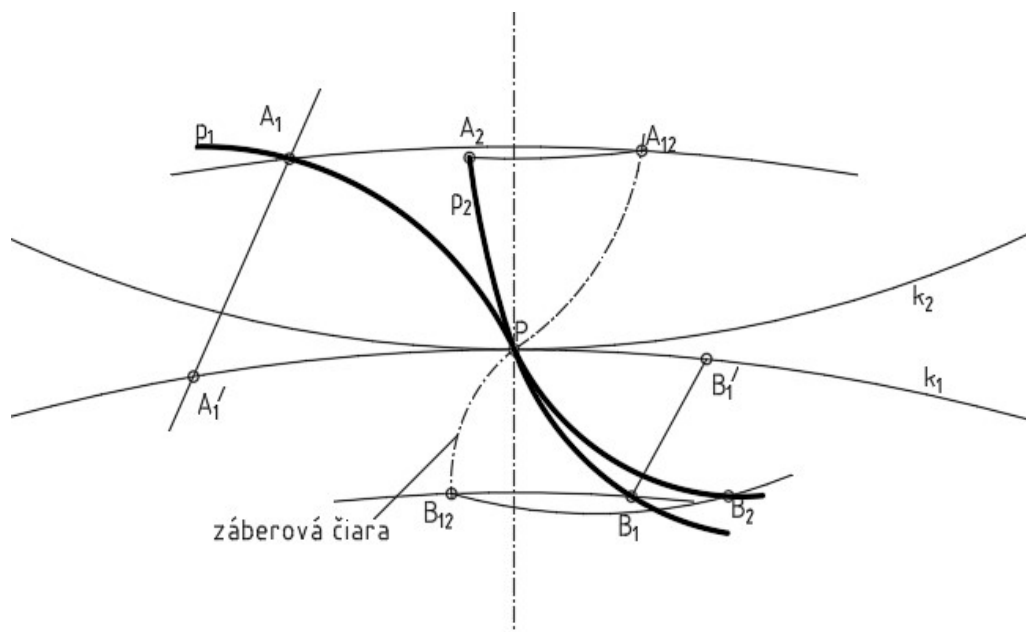
Obrázok 7 Uhol záberu  $\alpha$  a záberová čiara [9]

## 4 METÓDY KONŠTRUKCIE ZDRUŽENÝCH PROFILOV

Na základe podmienky o konštantnom prevodovom pomere môžeme navrhnúť vyhovujúce profily. Existujú rôzne metódy ako sa k týmto profilom dostať. Základné rozdelenie je na metódu priamu, kde si jeden profil zvolím a hľadám k nemu profil združený a na metódu nepriamu, kde hľadám združené profily pomocou vhodných polodií. Nepriamu metódu môžem ďalej rozdeliť na metódu trochoidnú a obáľkovú. Pre účely tejto práce je dôležitá hlavne obáľková metóda pretože jej špeciálny prípad vedie k evolventnému profilu [8].

### 4.1 PRIAMA METÓDA

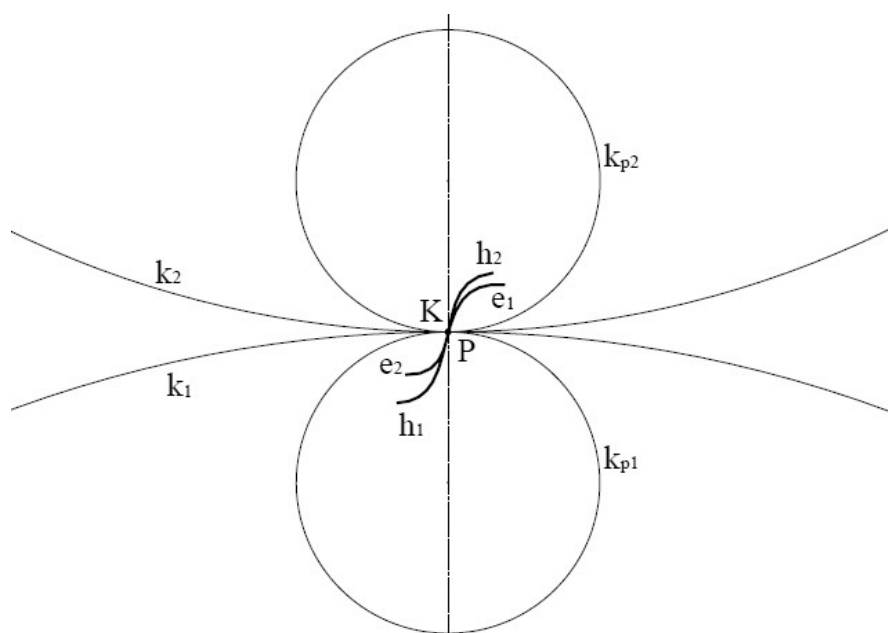
Cieľom je nájsť jednotlivé body združeného profilu  $p_2$  k bodom zvoleným na známom profile  $p_1$ . Pre bod dotyku platí, že normála zostrojená v tomto bode prechádza pólom  $P$ . Z ľubovoľného bodu napr.  $A_1$  spustíme normálu na valivú kružnicu  $k_1$ . Vzniknutý bod  $A_1'$  posunieme spolu s normálou do pólu  $P$  po kružnici  $k_1$ . Súčasne sa na základe podmienky stáleho prevodového pomeru bez sklzu pootočí aj kružnica  $k_2$ . Bod  $A_1$  sa po natočení premiestnil do bodu  $A_{12}$  a môžeme ho považovať za bod dotyku. Súbor takýchto bodov potom vytvorí záberovú čiaru. Bod  $A_{12}$  je potom aj bod dotyku hľadaného profilu  $p_2$ . Na počiatočnú polohu tohto bodu na profile  $p_2$  sa dostaneme spätným pootočením po kružnici  $k_2$  do bodu  $A_2$ . Súbor takýchto bodov vytvorí profil  $p_2$ . Tento postup môžeme v praxi použiť na nájdenie tvaru nástroja, ktorý by odvaľovaním vytvoril požadovaný profil [8].



Obrázok 8 Priama metóda [8]

## 4.2 TROCHOIDNÁ METÓDA

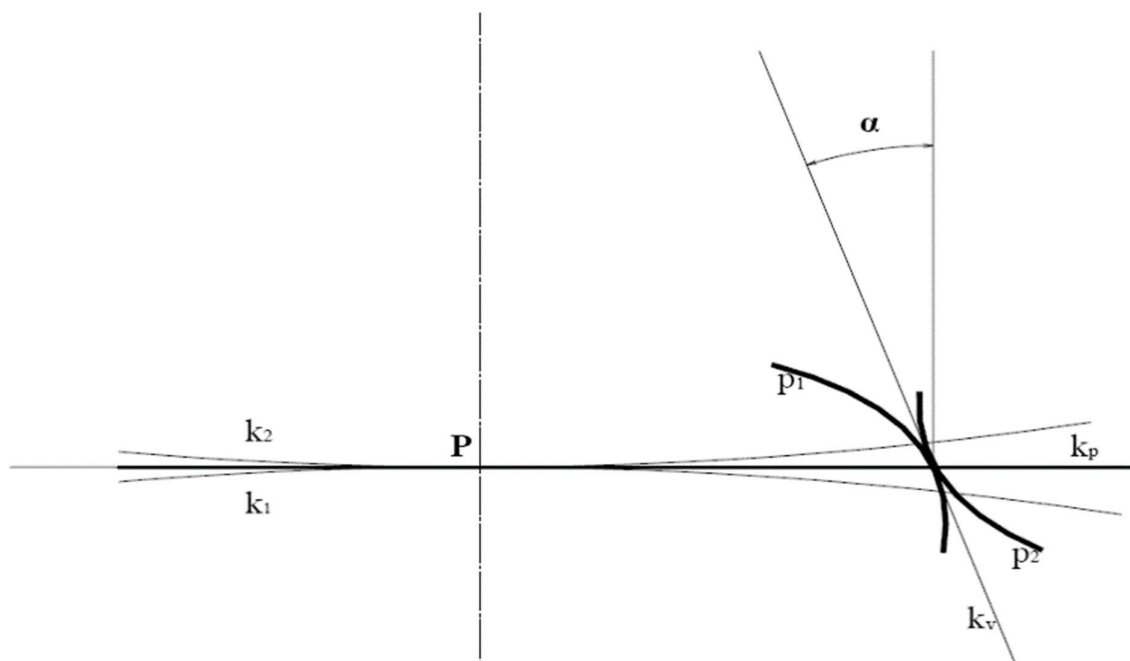
Pomocná polódia  $k_p$ , s ktorou je pevne spojený bod  $K$  prechádza pólom  $P$  valivých kružníc  $k_1$  a  $k_2$ . Valením po kružnici  $k_1$  vznikne profil  $p_1$  a analogicky vznikne aj profil  $p_2$ . Profily  $p_1$  a  $p_2$  teoreticky splňujú podmienky združených profilov. Prakticky má však význam len prípad, keď ako pomocné polódie zvolím kružnice  $k_{p1}$  a  $k_{p2}$  s polomerami  $\rho_1$  a  $\rho_2$ . Bod  $K$  môžeme zvoliť v bode  $P$ . Odvaľovaním kružnice  $k_{p2}$  vo vnútri kružnice  $k_2$  opíše bod  $K$  hypocykloidu  $h_2$ . Pri odvaľovaní kružnice  $k_{p2}$  na vonkajšku kružnice  $k_1$  vznikne epicykloida  $e_1$ . Použitím ďalšej pomocnej polodie  $k_{p1}$  získam podobne hypocykloidu  $h_1$  a epicykloidu  $e_2$ . Spojením kriviek  $e_1$  s  $h_1$  a  $e_2$  s  $h_2$  získam opäť dva združené profily (obr. 9). Ozubenie s takýmito profilmi sa nazýva cykloidné ozubenie a bližšie si ho rozoberieme v ďalších kapitolách [8].



Obrázok 9 Špeciálny prípad trochoidnej metódy [8]

## 4.3 OBÁLKOVÁ METÓDA

Je podobná trochoidnej metóde, avšak miesto bodu  $K$  je polodia  $k_p$  doplnená oblúkom  $k_v$ . Po odvaľovaní polodie  $k_p$  po kružnici  $k_1$  vytvorí oblúk  $k_v$  profil  $p_1$  a rovnako vytvorí aj profil  $p_2$ . Význam pre strojárstvo má význam opäť len zvláštny prípad tejto metódy, keď polodiou  $k_p$  je priamka kolmá na spojnicu stredov valivých kružníc a oblúk  $k_v$  je nahradený úsečkou, ktorá zvierá s priamkou  $k_p$  uhol  $\alpha$  (obr 10). Takéto profily tvoria krivky, ktoré sa nazývajú evolventy. Evolventné profily majú oproti ostatným profilom mnoho výhod. Bližšie si ich popíšeme v ďalších kapitolách [8].



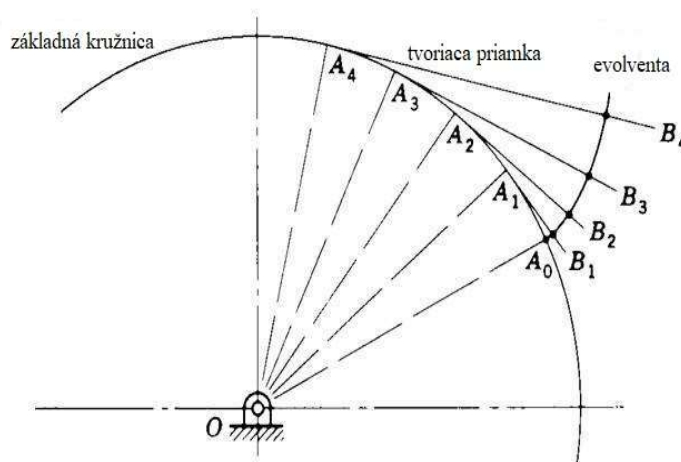
Obrázok 10 Špeciálny prípad obáľkovej metódy [8]

## 5 ZDRUŽENÉ PROFILY OZUBENIA

Ako bolo naznačené v predchádzajúcej kapitole, najdominantnejší typ ozubenia v strojnom priemysle je evolventný typ profilu zuba, preto si ho rozoberieme detailnejšie.

### 5.1 EVOLVENTNÉ OZUBENIE

Tvar boku zubu pri evolventnom ozubení tvorí evolventa. Evolventu môžeme všeobecne vytvoriť napríklad ako trajektóriu bodu B na tzv. tvoriacej priamke valiacej sa po základnej kružnici, čo si môžeme predstaviť aj ako bod na napnutom lane, ktoré sa odvíja z povrchu kotúča (obr. 11). Evolventa však môže vzniknúť aj obáľkovou metódou popísanou v predchádzajúcej kapitole alebo aj ako obálka vytvorená inou evolventou. Evolventné ozubenie môžeme tým pádom vyrábať ozubeným hrebeňom s priamym ostrím (systém Maag) alebo evolventným kotúčovým nožom (systém Fellows) pri zaistení jeho odvaľovania voči polotovaru [1],[8].



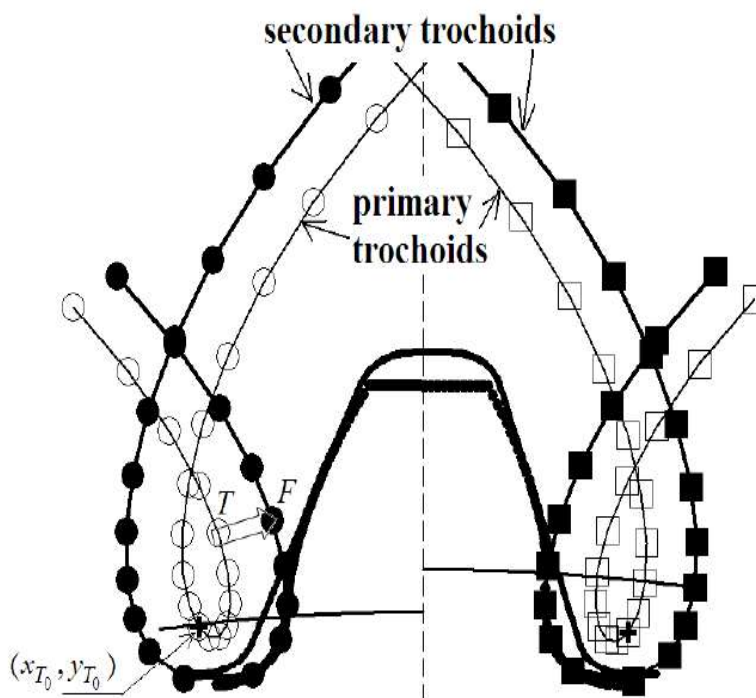
Obrázok 11 Evolventa [1]

Výhody evolventného ozubenia boli známe už na začiatku vývoja a výskumu ozubenia. K tomuto vývoju najviac prispel Jean-Victor Poncelet, ktorý matematicky popísal výhody evolventného ozubenia oproti cykloidnému. Z hľadiska opotrebenia je najzásadnejší rozdiel v pôsobení normálovej sily, ktorá v prípade evolventného ozubenia pôsobí na bok zubu stále pod rovnakým uhlom. Pri cykloidnom ozubení normálová sila klesá so vzdialenosťou od valivého bodu. Ďalšou výhodou evolventného ozubenia je, že za predpokladu rovnakého rozstupu tvar profilu jedného kolesa nezávisí na tvare profilu druhého kolesa. Evolventné ozubenie nie je citlivé na zmenu osovej vzdialenosti, pričom pri cykloidnom ozubení by zmenou osovej vzdialenosti došlo nesprávnemu záberu a preto je nutná väčšia vôľa v ozubení ako pri evolventnom ozubení [7].

Pre evolventné ozubenie je charakteristická priamková záberová čiara. Pri otáčaní dvoch ozubených kolies v zábere sa teda bod, v ktorom sa zuby dotýkajú, pohybuje po priamke, ktorá je zároveň nositeľkou prenášanej sily. Kolmá vzdialenosť tejto priamky od osi otáčania je konštantná, následkom čoho je pri rovnakej sile medzi zubami konštantný aj krútiaci moment prenášaný ozubením [8].

### 5.1.1 PRECHODOVÁ KRIVKA

Bočný profil v evolventnom ozubení tvorí okrem evolventy aj tzv. prechodová krivka, ktorá ale nevstupuje do záberu. Jej geometria má však priamy vplyv na ohybové napätie zuba. Prechodová krivka je následok výroby. Priamková časť nástroja dokončuje evolventu, zatiaľ čo zaoblená časť začína vytvárať prechodovú krivku smerom od pätnjej kružnice. Dráha relatívneho pohybu stredu nástroja vytvára tzv. primárnu trochoidu (obr. 12). Sekundárna trochoida je k nej ekvidistantná krivka vzdialená o polomer zaoblenia nástroja a vytvára prechodovú krivku zuba (obr. 2). Geometria prechodovej krivky je teda závislá na type a geometrii nástroja. Prechodová krivka ovplyvňuje ohybovú pevnosť zuba nakoľko je v danom mieste koncentrované maximálne napätie. [10].



Obrázok 12 Primárna a sekundárna trochoida [10]

Súradnice bodov primárnej trochoidy môžeme vyjadriť rovnicami [10]:

$$x_T = -r_p \sin \varphi + (r_p \varphi + x_{T0}) \cos \varphi + y_{T0} \sin \varphi \quad (20)$$

$$y_T = r_p (1 - \cos \varphi) - (r_p \varphi + x_{T0}) \sin \varphi + y_{T0} \cos \varphi \quad (21)$$

kde  $r_{pl}$  je polomer rozstupovej kružnice,  $x_{T0}$  a  $y_{T0}$  sú súradnice stredu zaoblenia hlavy nástroja a  $\varphi$  je parameter valenia.



Sekundárnu trochoidu môžeme potom vyjadriť [10]:

$$x_F = x_T + \rho(\sin(\gamma - \varphi)) \quad (22)$$

$$y_F = y_T + \rho(\cos(\gamma - \varphi)) \quad (23)$$

kde  $\rho$  je polomer zaoblenia hlavy nástroja a  $\gamma = \arctg(y_{T0}/r_p\varphi + x_{T0})$ .

## 5.2 CYKLOIDNÉ OZUBENIE

Cykloidné ozubenie je najstaršie teoreticky odvodené ozubenie charakteristické záberovou čiarou zloženou z dvoch kružnicových oblúkov. Profil zuba tvorí epicykloida a hypocykloida a je vytvorený trochoidnou metódou popísanou v predchádzajúcich kapitolách. Pre zložitý tvar tohto ozubenia je výroba nákladná a zložitejšia ako pri evolventnom tvare, preto sa v strojárstve prevažne nevyskytuje. Využitie nachádza v hodinárstve a presnej mechanike [13].

## 5.3 WILDHABER – NOVIKOV OZUBENIE

Tento typ ozubenia sa využíva v prevodoch s prenosom veľkých krútiacich momentov pri nízkych rýchlostiach. Ozubené kolesá tvoriace súkolesie majú rozdielny profil zuba. Jedno z kolies má konkávny a druhé konvexný tvar boku zuba, prípadne sa používa novší typ s parabolickým tvarom zuba. Zaujímavé je, že zakrivenie bokov zubov nemá rovnaký polomer, z čoho vyplýva, že zakrivené plochy by sa teoreticky mali dotýkať len v jednom bode. Vplyvom zaťaženia sa však bod dotyku mení na elipsovú plochu. Väčšia kontaktná plocha znamená menšie kontaktné napätie. Wildhaber – Novikovo ozubenie sa používa v prevodoch, ktoré fungujú ako veľké reduktory pre kompresori, generátori alebo ťažiarske vybavenie [13].

## 6 KOREKCIA OZUBENIA

Ako už bolo popísané v prechádzajúcich kapitolách, k zabráneniu podrezania paty zubu musí ozubené koleso dosahovať určitý minimálny počet zubov. V prípade, že je tento počet zubov jedného kolesa v súkolesí menší, je potrebné ho korigovať. Korekcia je vlastne posuv obidvoch profilov zubov zaberajúcich kolies medzi dotýkajúcimi sa rozstupovými kružnicami resp. posunutie výrobného nástroja. Korekcia je pre takéto koleso kladná a pre druhé koleso s dostatočným počtom zubov záporná. Pre súkolesie teda musí platiť  $z_1 + z_2 > 34$ , kde  $z_1$  a  $z_2$  sú počty zubov dvoch kolies tvoriacich súkolesie [4].

Ďalšie dôvody pre korekciu sú [11]:

- zabráneniu špicatosti zubov
- zníženiu hlučnosti, vibrácií a zlepšeniu účinnosti ozubenia
- zväčšení únosnosti ozubenia
- dosiahnutie presnej osovej vzdialenosti

Posunutie (obr. 13) sa vyjadruje ako súčin modulu a jednotkového posunutia [11]

$$u_x = x \cdot m \quad (24)$$

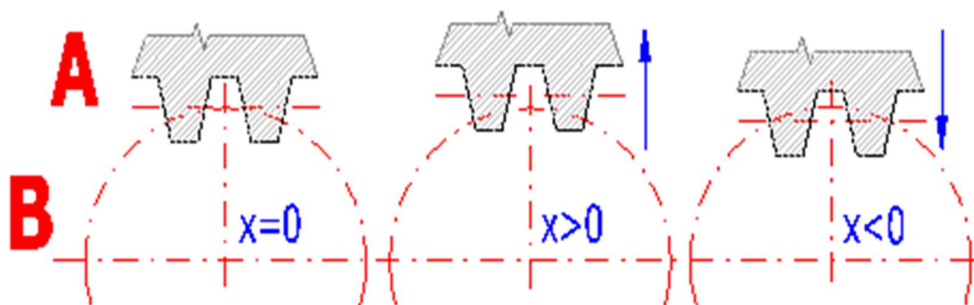
kde  $u_x$  je posunutie výrobného nástroja a  $x$  je jednotkové posunutie.

Kladné jednotkové posunutie kolesa s počtom zubov menším ako minimálny počet sa určí zo vzťahu [4]:

$$x_1 \geq \frac{17 - z_1}{17} \quad (25)$$

Aby nedošlo k podrezaniu druhého kolesa s počtom zubov väčším ako je minimálny počet, musí pre jeho korekciu platiť [4]:

$$x_2 \geq \frac{17 - z_2}{17} \quad (26)$$



Obrázok 13 Posunutie nástroja pri korekcii [11]

S korekciou sa menia aj ďalšie parametre ozubenia. Pre šírku zubu korigovaného kolesa platí [8]

$$s = \frac{p}{2} + 2 x m \tan \alpha \quad (27)$$

pre zubovú medzeru potom analogicky

$$e = \frac{p}{2} - 2 x m \tan \alpha \quad (28)$$

V praxi má význam počítat hrúbku zuba na hlavovej kružnici. Príliš malá hrúbka má za následok nežiadúci stav označovaný ako vznik špicatosti zuba. Ako minimálna hodnota  $s_a$  sa odporúča  $s_a = 0,4m$  pre kalené a  $s_a = 0,25m$  pre netvrdené ozubené kolesá [8].

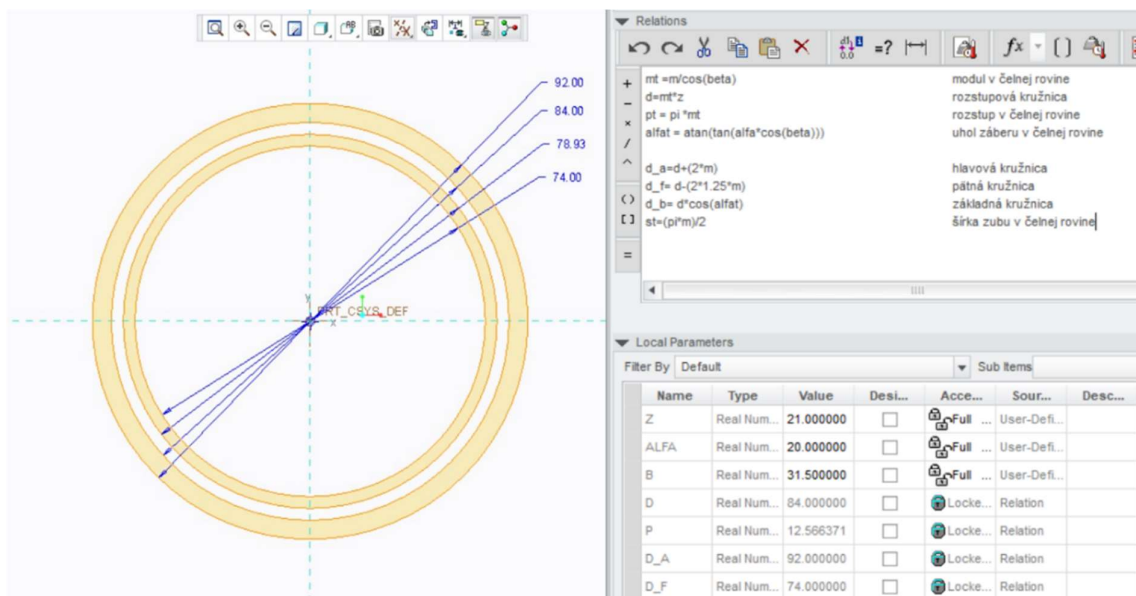
## 7 TVORBA MODELU

Na základe zadania vedúceho bakalárskej práce som so znalosťami získanými počas písania tejto práce vytvoril 32 modelov ozubených kolies pre zadanú zostavu prevodovky určenej pre aplikáciu do úžitkových vozidiel. Tieto modely budú odovzdané vedúcemu bakalárskej práce a poslúžia pre Ústav automobilového a dopravného inžinierstva (Vysoké učení technické v Brně) na výskum a stanovenie tuhosti záberu pomocou metódy konečných prvkov, ktoré môžu prispieť napríklad k zníženiu vibrácií a hluku. Na tvorbu modelov som využil program *Creo Parametric 2.0*. V tejto kapitole si tvorbu jedného modelu všeobecne popíšeme. Na popis postupu tvorby 3D modelu bolo vybrané jedno z ozubených kolies so šikmými zubami.

### 7.1 TVORBA 2D MODELU

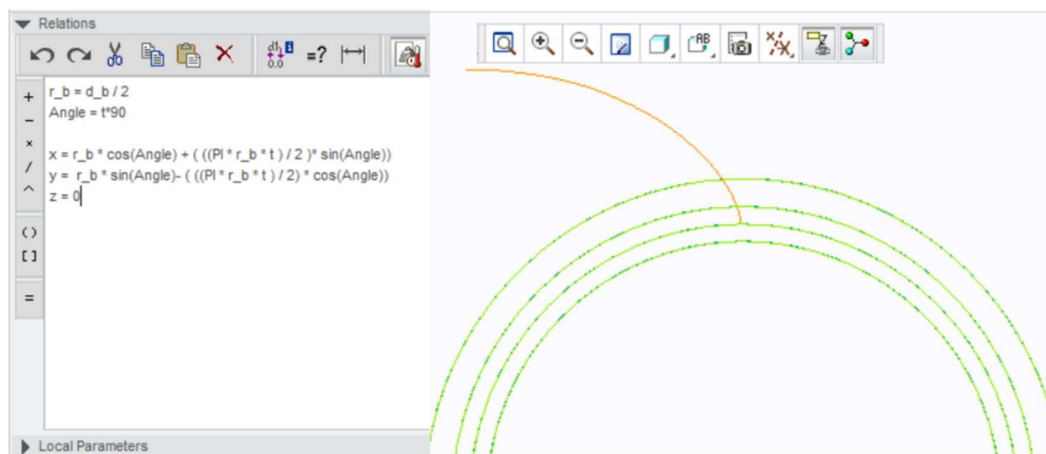
Pre vytvorenie modelu je nutné začať s 2D modelom. Postup je podobný ako pri tvorbe kola s priamymi zubami. Pri šikmých zuboch sú však normalizované parametre platné pre rovinu normálovú, preto je nutné tieto parametre prepočítať do čelnej roviny tak ako je to popísané v kapitole 2. Aby sme nemuseli tvoriť každý model odznova, budeme pracovať s príkazmi *Parameters* a *Relations*. S plne parametrickým modelom už stačí meniť len vstupné parametre a program nám model s rôznym zadaním vygeneruje sám.

Ako prvé boli nakreslené charakteristické kružnice a to kružnica pätná, základná, rozstupová a hlavová. Tieto kružnice sme parametrizovali tým, že sme každej priradili príslušný vzťah s využitím znalostí z rešeršnej časti tejto práce (obr. 14).



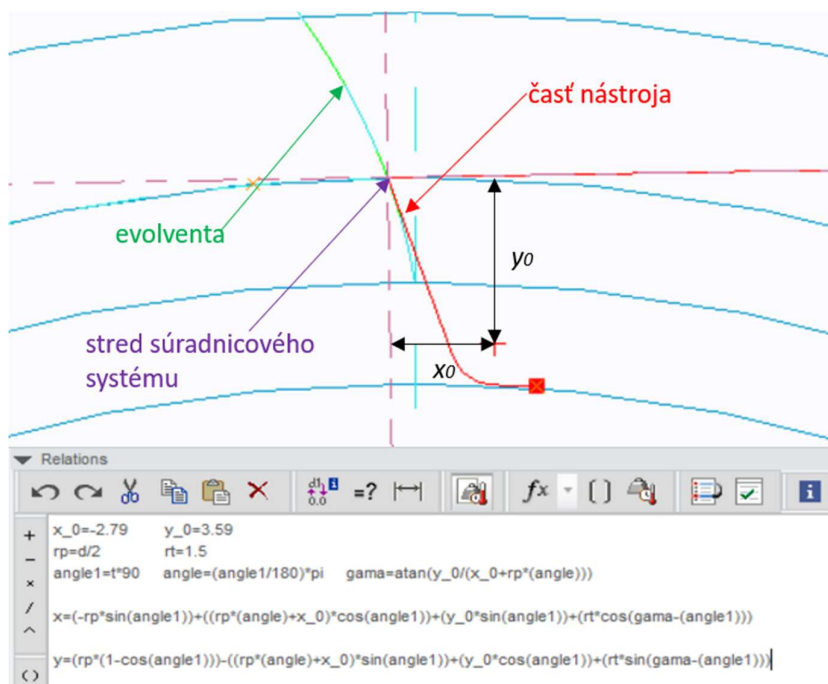
Obrázok 14 Charakteristické kružnice

Následne bol vytvorený jeden zub. Ako už vieme, profil zubu tvorí evolventa a trochoida. Evolventa bola vytvorená pomocou rovníc pre karteziánsky súradnicový systém (obr. 15). Stred súradnicového systému bol určený v strede globálneho systému modelu a súradnicový systém sa nastavil ako karteziánsky [12].

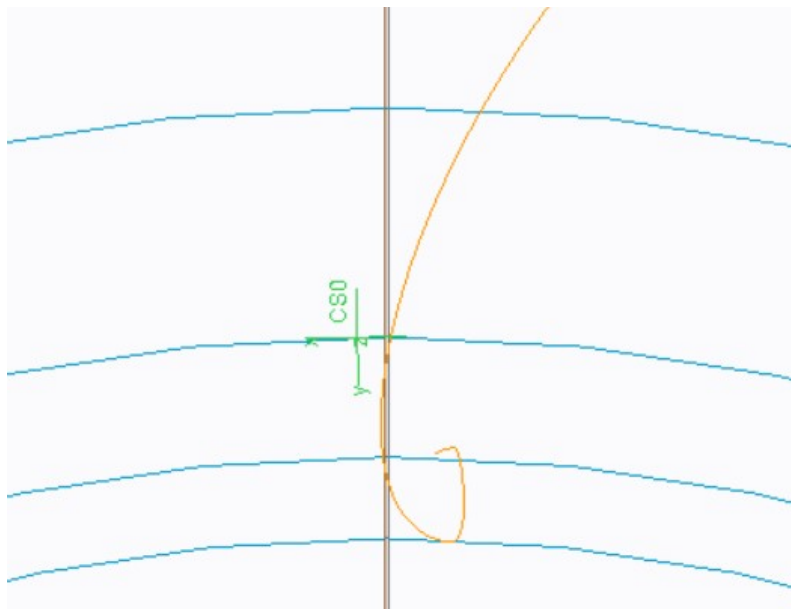


Obrázok 15 Tvorba evolventy

Pre vytvorenie správnej trochoidy musíme najskôr nájsť súradnice bodu primárnej trochoidy. Na to nám posluží náčrt časti nástroja. Počiatok súradnicového systému trochoidy sa nachádza v priesečníku evolventy a rozstupovej kružnice. Os súradnicového systému prechádza stredom ozubeného kola. Po nájdení potrebných parametrov môžeme trochoidu (obr. 17) zadať pomocou zistených rovníc z rešeršnej časti (obr. 16).

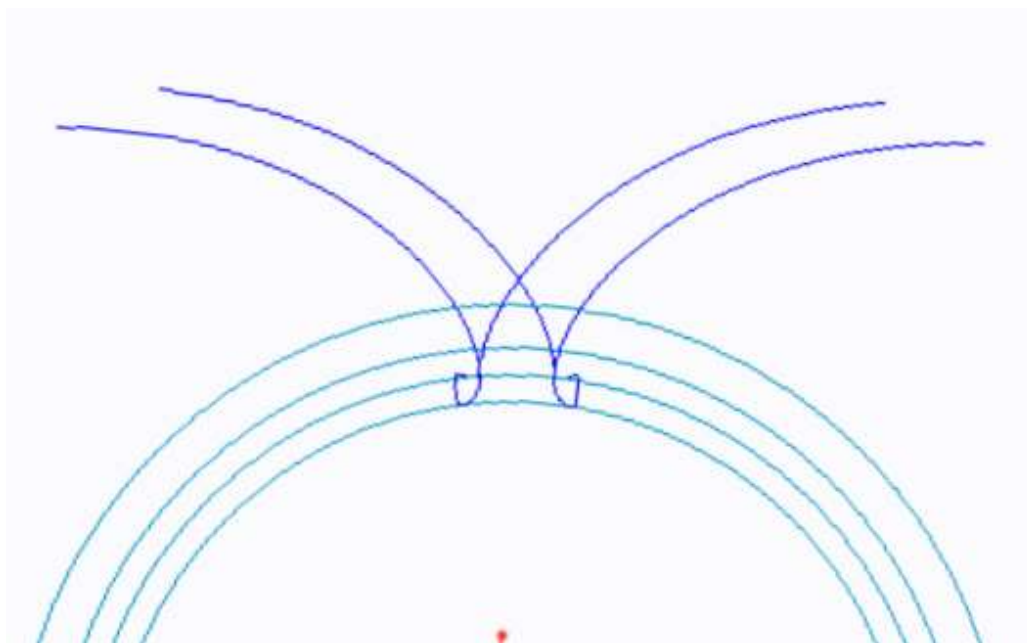


Obrázok 16 Tvorba trochoidy



Obrázok 17 Trochoida

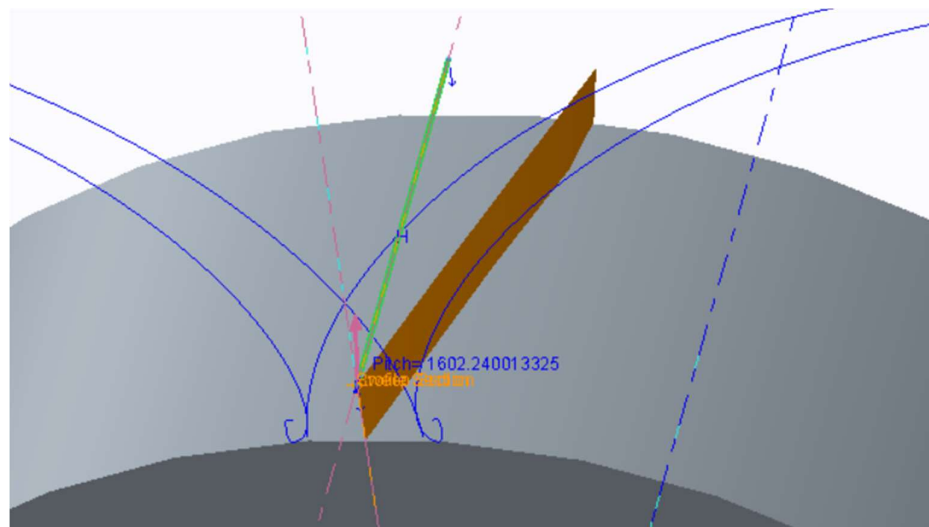
Po určení boku zubu sme na rozstupové kružnicu vyniesli krivku o veľkosti šírky zubu, ktorá začínala v evolvente. Stredom tejto krivky sme viedli rovinu rovnobežnú na os otáčania. Vzhľadom na túto rovinu sme pomocou príkazu *Mirror* odzrkadlili evolventu a trochoidu. Celý profil zuba teda tvorili prienik pôvodnej evolventy a trochoidy, odzrkadlenej evolventy a trochoidy, hlavová a pätná kružnica (obr 18).



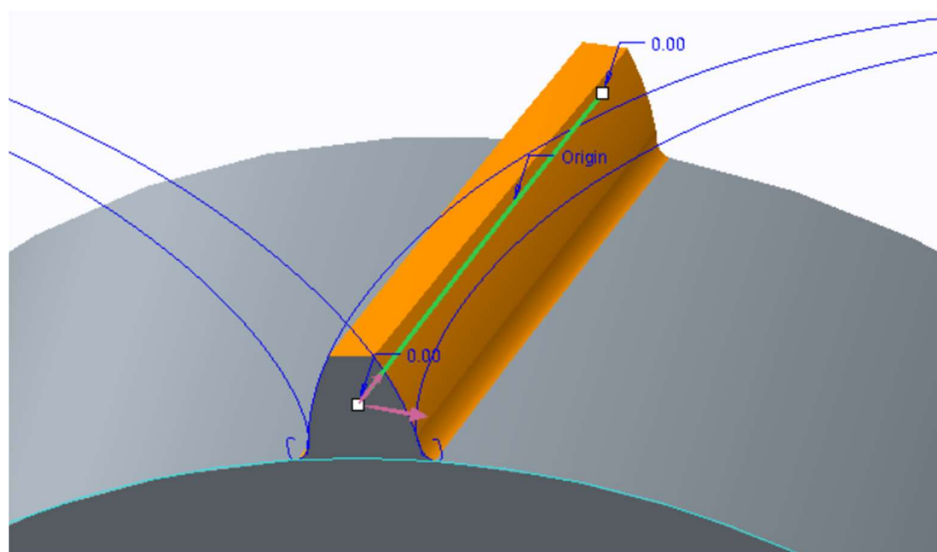
Obrázok 18 Profil zuba

## 7.2 TVORBA 3D MODELU

Z pätnnej kružnice vysunieme príkazom *Extrude* telo ozubenia. Hodnota vysunutia bude parametricky zadaná šírka ozubenia. Pomocou funkcie *Helical Sweep* sme vytvorili rovinu, ktorá určuje profil zubu po šírke kola. Uhol a zmysel stúpania skrutkovice bol zadáný opäť parametricky a podľa zadania (obr. 19). Pomocou funkcie *Sweep* sme vytiahli zub z jeho 2D modelu po trajektórii roviny vytvorenej v predchádzajúcom kroku (obr. 20). Ďalšie prípadné úpravy zubu ako napríklad spôsoby uchytienia na hriadeľ alebo skosenia boli vytvorené podľa jednotlivých zadání.

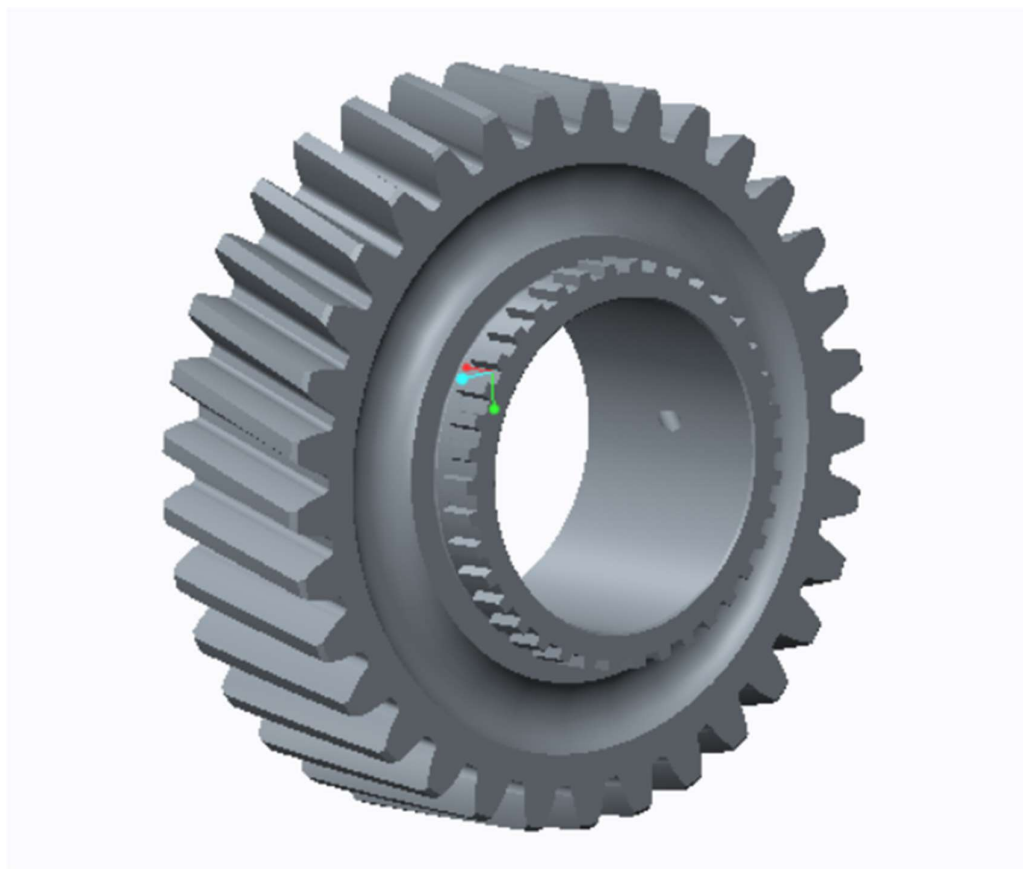


Obrázok 19 Rovina určujúca profil zubu



Obrázok 20 Vysunutý zub

Takto vytvorený zub sme pomocou príkazu *Pattern* vynásobili počtom zubov a rovnomerne rozmiestnili po obvode. Po domodelovaní individuálnych úprav sme dostali výsledný model (obr. 21).



Obrázok 21 Model ozubeného kolesa



## ZÁVER

Cieľom tejto bakalárskej práce bola rešerš metód a postupov používaných ku konštrukcii presného tvaru profilu zubu ozubených kolies a následné vyhotovenie 3D modelov s využitím získaných poznatkov prostredníctvom zvoleného CAD softwaru.

Rešeršná časť analyzovala hlavne geometriu ozubených kolies a ich zubov. Krivky ako evolventa a trochoida, ktoré tvoria profil zubu a ktoré sa v priemysle používajú najčastejšie boli rozobrané detailnejšie. Pre bližšie porozumenie problému bolo popísané aj rozdelenie typov ozubených kolies, ozubení a ich porovnanie. Detailne boli rozobrané hlavne poznatky o čelných ozubených kolesách so šikmými zubami, na základe ktorých bol vyhotovený 3D model v programe *Creo Parametric 2.0*.

Praktická časť popisovala detailný postup vytvorenia 3D modelu jedného ozubeného kolesa zo zadania od vedúceho bakalárskej práce. Vytvorené modely boli odovzdané vedúcemu bakalárskej práce a budú slúžiť pre Ústav automobilového a dopravného inžinierstva (Vysoké učení technické v Brně) na ďalší výskum v oblasti tuhosti a kontaktného tlaku, ktorý môže prispieť k zlepšeniu niektorých vlastností ozubených prevodov. Keďže sú modely zadane parametricky, môžu slúžiť aj pre ďalší výskum pre ozubené kolesá s inými parametrami.

## POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

- [1] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE, Richard G. (Richard Gordon) BUDYNAS, Martin HARTL a Miloš VLK. *Konstruování strojních součástí*. V Brně: VUTUM, 2010, xxv, 1159 s. : il. ; 26 cm. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [2] MÁLIK, Ladislav a Štefan MEDVECKÝ. *Časti a mechanizmy strojov*. V Žiline: Žilinská univerzita, 2003. Vysokoškolské učebnice. ISBN 80-8070-043-5.
- [3] Martin ŽARNAY, Jozef BRONČEK a Ladislav ČILLÍK. *Konstruovanie I* [online]. Žilinská univerzita v Žiline, 2012 [cit. 2019-05-19]. ISBN 978-80-554-0610-7. Dostupné z: <http://www.konstruovanie1.uniza.sk/>
- [4] BOLEK, Alfred. *Části strojů: Celost. vysokošk. učebnice. Díl 2, Převody a převodová ústrojí*. Praha: ČSAV, 1963. Spisy České matice techn. Roč. 68/1963.
- [5] PAGÁČ, Marek. *Postup modelování čelního ozubeného kola se šikmými zuby. Můj Solidworks* [online]. 2017 [cit. 2019-05-05]. Dostupné z: <https://www.mujsolidworks.cz/postup-modelovani-celniho-ozubeného-kola-se-sikmými-zuby/>
- [6] PEŠÍK, Lubomír. *Části strojů: stručný přehled. 2. díl*. Liberec: Technická univerzita, 2002. ISBN 80-7083-608-3.
- [7] VEREŠ, Miroslav a Miroslav BOŠANSKÝ. *Teória čelného rovinného ozubenía*. Bratislava: Slovenská technická univerzita, 1999. Edícia monografií. ISBN 80-227-1226-4.
- [8] ŠVEC, Vladimír. *Části a mechanizmy strojů: mechanické převody*. Praha: České vysoké učení technické, 1999. ISBN 80-01-01934-9.
- [9] Pressure angle. Khkgears [online]. Nakacho Kawaguchi-shi Saitama-ken, Japan: Kohara Gear Industry Co., 2017 [cit. 2019-05-05]. Dostupné z: [https://khkgears.net/new/gear\\_knowledge/introduction\\_to\\_gears/pressure\\_angle.html](https://khkgears.net/new/gear_knowledge/introduction_to_gears/pressure_angle.html)
- [10] XU, S., HOUSER, D. Characteristics of trochoids and their application to determining gear teeth fillet shapes. In: *Mechanism and machine theory*. Pergamon. 14 s.
- [11] Čelní ozubení s přímými a šikmými zuby. In: MITCalc [online]. c2003-2016 [cit. 2019-05-04]. Dostupné z: <http://www.mitcalc.com/doc/gear1/help/cz/gear1txt.htm>
- [12] ČEČÁKOVÁ, Stanislava. *Cyklické křivky* [online]. Praha: FA ČVUT v Praze [cit. 2019-05-19]. Dostupné z: <http://15122.fa.cvut.cz/?page=cz,elektronicka-skripta>
- [13] PÍŠKA, Miroslav. *Speciální technologie obrábění*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2009. Učební texty vysokých škol. ISBN 978-80-214-4025-8.

## ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV

$c$	[mm]	Radiálna vôľa
$c^*$	[–]	Súčiniteľ radiálnej vôľe zubu
$d$	[mm]	Priemer rozstupovej kružnice
$d_a$	[mm]	Priemer hlavovej kružnice
$d_f$	[mm]	Priemer päťnej kružnice
$e$	[mm]	Šírka zubovej medzery
$h$	[mm]	Výška zubu
$h_a$	[mm]	Výška hlavy zubu
$h_a^*$	[–]	Súčiniteľ výšky hlavy zubu
$h_f$	[mm]	Výška päty zubu
$h_f^*$	[–]	Súčiniteľ výšky päty zubu
$m$	[mm]	Modul ozubení
$m_n$	[mm]	Normálový modul
$m_t$	[mm]	Čelný modul
$p$	[mm]	Rozstup
$P$	[–]	Pól rozstupových kružníc
$p_n$	[mm]	Normálový rozstup
$p_t$	[mm]	Čelný rozstup
$r_1$	[mm]	Polomer rozstupovej kružnice pastorku
$r_2$	[mm]	Polomer rozstupovej kružnice koleša
$r_p$	[mm]	Polomer rozstupovej kružnice
$s$	[mm]	Šírka zubu
$u_x$	[mm]	Posunutie nástroja
$v_1$	[m/s]	Obvodová rýchlosť pastorku
$v_2$	[m/s]	Obvodová rýchlosť koleša
$x$	[–]	Jednotkové posunutie nástroja
$x_1$	[–]	Jednotkové posunutie nástroja pastorku
$x_2$	[–]	Jednotkové posunutie nástroja koleša
$x_F$	[mm]	Súradnica sekundárnej trochoidy
$x_T$	[mm]	Súradnica primárnej trochoidy
$x_{T0}$	[mm]	Súradnica stredu zaoblenia nástroja
$y_F$	[mm]	Súradnica sekundárnej trochoidy

$y_T$	[mm]	Súradnica primárnej trochoidy
$y_{T0}$	[mm]	Súradnica stredu zaoblenia nástroja
$z$	[–]	Počet zubov ozubeného kolesa
$z_1$	[–]	Počet zubov pastorku
$z_2$	[–]	Počet zubov kolesa
$z_{\min}$	[–]	Minimálny počet zubov
$\alpha$	[°]	Uhol záberu
$\alpha_n$	[°]	Normálový uhol záberu
$\alpha_t$	[°]	Čelný uhol záberu
$\beta$	[°]	Uhol sklonu skrutkovice
$\rho$	[mm]	Polomer zaoblenia nástroja
$\tau$	[–]	Valivá rovina
$\varphi$	[rad]	Parameter valenia
$\omega_1$	[rad/s]	Uhlová rýchlosť pastorku
$\omega_2$	[rad/s]	Uhlová rýchlosť kolesa